

ADVANCED LEVEL EXAMINATION

COMBINED MATHS

2021
THEORY

COMPLEX NUMBERS

In mathematics, a complex number is a number that can be expressed in the form $a + bi$, where a and b are real numbers, and i is a symbol called the imaginary unit, and satisfying the equation $i^2 = -1$. Because no "real" number satisfies this equation, i was called an imaginary number by René Descartes. For the complex number $a + bi$, a is called the real part and b is called the imaginary part.

රනේ දිසානායක

B.Sc Hon's
(University of Colombo)



Complex numbers

THEORY

සංකීර්ණ සංඛ්‍යා

Ruwan Darshana

B.Sc. (Hons)

(1) ආකාරය

01. සුළු කරන්න. $i^7 + i^{-3} + i^9 + i^{-5} + i^{4n} + i^{4n+1}$

02. පහත දැක්වෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා යුගල එකතු කරන්න.

(i) $3 + 5i$	$7 - i$	(ii) $4 - i$	$3 + 3i$
(iii) $2 + 7i$	$4 - 9i$	(iv) $a + bi$	$c + di$

03. 2 වැනි ප්‍රශ්නයේ එක් එක් කොටසේ පළමුවන සංඛ්‍යාවෙන් දෙවැනි අඩු කරන්න.

04. පහත ඒවා සුළු කරන්න.

(i) $(2 + i)(3 - 4i)$	(ii) $(5 + 4i)(7 - i)$	(iii) $(3 - i)(4 - i)$
(iv) $(3 + 4i)(3 - 4i)$	(v) $(2 - i)^2$	(vi) $(1 + i)^3$
(vii) $i(3 + 4i)$	(viii) $(x + yi)(x - yi)$	
(ix) $i(1 + i)(2 + i)$	(x) $(a + bi)^2$	

05. පහත දැක්වෙන එක් එක් භාගයේ හරය තාත්වික කොට ඒ නයිත් ඒ එක එකක් $a + bi$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(i) $\frac{2}{1 - i}$	(ii) $\frac{3 + i}{4 - 3i}$	(iii) $\frac{4i}{4 + i}$	(iv) $\frac{1 + i}{1 - i}$
(v) $\frac{7 - i}{1 + 7i}$	(vi) $\frac{x + yi}{x - yi}$	(vii) $\frac{3 + i}{i}$	(viii) $\frac{-2 + 3i}{-1}$

06. පහත දී ඇති එකක් $a, b \in \mathbb{R}$ වූ $a + ib$ ආකාරයෙන් දැක්වන්න.

(i) $\frac{2 - 4i}{1 + 2i}$	(ii) $\frac{3 + 7i}{2 + i}$	(iii) $\frac{4 + 3i}{4 - 3i}$
(iv) $\frac{3}{5 - 2i}$	(v) $\frac{7 - 2i}{3 + 2i}$	(vi) $\frac{(2 + 3i)(2 - 3i)}{3 - 2i}$

07. පහත සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $x + iy$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

- (i) $\frac{3-i}{1+i}$ (ii) $\frac{5+2i}{1-4i}$ (iii) $\frac{1+i}{1-i}$
- (iv) $\frac{3-4i}{2+3i}$ (v) $\sqrt{\frac{1+i}{1-i}}$ (vi) $\frac{(-1+i)^2}{(1+i)^4}$
- (vii) $\left[\left(\frac{5+2i}{2-5i} \right) - \left(\frac{3-4i}{4+3i} \right) + 1 \right] \left[\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^5 \right]$
- (viii) $\frac{(1+i)^4}{(-1+i)^2}$ (ix) $\frac{\sqrt{3+4i} + \sqrt{3-4i}}{\sqrt{3+4i} - \sqrt{3-4i}}$ (x) $\frac{7-2i}{5+3i}$

08. (i) $z_1 = 3 + 4i$ සහ $z_2 = 2 - 3i$ හි $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ සොයන්න.
- (ii) $z_1 = 2 + 3i$ සහ $z_2 = 4 - i$ හි $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ සොයන්න.
- (iii) $z_1 = x_1 + iy_1$ සහ $z_2 = x_2 + iy_2$ හි $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$ සොයන්න.

09. $z_1 = 2 + 3i$ ද, $z_2 = 5 - 2i$ ද, $z_3 = 3 + i$ ද වේ හම් මේවා සොයන්න.

- (i) $z_1 + z_2 + z_3$ (ii) $2z_1 - z_2 + 3z_3$ (iii) $z_1 z_2$
- (iv) $z_1 (z_2 + z_3)$ (v) $z_1 z_3 + z_2 z_3$ (vi) $z_1 + iz_2 + i^2 z_3$
- (vii) $z_1^2 + 3z_2$ (viii) $\frac{z_1}{z_2}$ (ix) $\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_2}$
- (x) $\frac{z_1 + z_2}{z_2 + z_3}$ (xi) $\frac{i}{z_1 + z_3}$ (xii) $\frac{iz_1 + z_3}{z_2}$

10. (i) $3 + 2i$ සහ $3x + 2yi$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා හම් හම් x හා y සොයන්න.
- (ii) $(2 - 3i)(x + iy)$ හම්, x හා y සොයන්න.
- (iii) $\frac{(1+i)x - 2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y + i}{3-i} = i$ තෘප්ත කරන x, y සොයන්න.

11. x හා y සඳහා පහත දැක්වෙන සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $x + yi = (3 + i)(2 - 3i)$

(ii) $\frac{2 + 5i}{1 - i} = x + yi$

(iii) $3 + 4i = (x + yi)(1 + i)$

(iv) $x + yi = 2$

(v) $x + yi = (3 + 2i)(3 - 2i)$

(vi) $x + yi = (4 + i)^2$

(vii) $\frac{x + yi}{2 + i} = 5 - i$

(viii) $(x + yi)^2 = 3 + 4i$

12. (i) $z = x + iy$ නම් $\frac{2z}{i+i} - \frac{2z}{i} = \frac{5}{2+i}$ නම් x හා y සොයන්න.

(ii) x හා y තාත්වික යැයි උපකල්පනය කරමින්, $\frac{y}{2-i} - \frac{15x}{3-4i} = \frac{61}{16+7i}$ නම්, සමීකරණ විසඳන්න.

13. මේවායේ තාත්වික හා අතාත්වික කොටස් සොයන්න.

(i) $(2 - i)(3 + i)$

(ii) $(1 - i)^3$

(iii) $\frac{3 + 2i}{4 - i}$

(iv) $\frac{2}{3+i} + \frac{3}{2+i}$

(v) $\frac{1}{x-yi} - \frac{1}{x-yi}$

(vi) $\left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right]^3$

(vii) $\left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]^2$

14. (i) $\frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ නම්, $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$ හා $z - \frac{1}{z} = 2i \sin \alpha$ බව පෙන්වන්න.

15. (i) $z + iy$ ද, $u = \frac{z+1}{2z-1}$ ද නම්, u හුදෙක් අතාත්වික වීම x හා y අතර සම්බන්ධය සොයන්න.

(ii) $z = x + iy$ ද, $w = z + 2$ නම්, $\frac{w+1}{w-1}$ හුදෙක් අතාත්වික වීමට x හා y අතර සම්බන්ධය සොයන්න.

16. $x + iy = \sqrt{3 + 4i}$ නම්, $x^2 - y^2$ සහ xy සොයන්න. එමගින් x හා y සොයන්න.

17. (i) $3 - 4i$ හි වර්ගමූලය සොයන්න.
(ii) $2 + i$ මූලයක් ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.
18. (i) $z = a + ib$ ($b \neq 0$) නම් සහ $z + w$, zw තාත්වික සංඛ්‍යා ද වේ නම්, $w = a - ib$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $z = \frac{(1 - 3i)^2}{i(1 + i)^3}$ නම් $z = p + iQ$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න.
19. (i) $x + iy = \sqrt{\frac{1 + ib}{1 - ib}}$ වේ නම්, $(x^2 + y^2) = 1$ බව පෙන්වන්න.
(ii) $x + iy = \sqrt{2p + 3qi}$ නම්, $(x^2 + y^2) = \sqrt{4p^2 + 9q^2}$ බව පෙන්වන්න.
20. $\bar{z} = x + iy$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක ප්‍රතිබද්ධය \bar{z} නම් $\overline{\bar{z}} = x - iy$ මගින් දෙනු ලැබේ. α , β යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යා හා n යනු ධන නිඛිලයක් වන විට පහත ප්‍රතිඵල සාධනය කරන්න.
(i) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ (ii) $\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$ (iii) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$
(iv) $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ (v) $\overline{\alpha^{-1}} = (\overline{\alpha})^{-1}$ (vi) $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$
21. (i) $z = 3 + 4i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ වර්ගමූලය සොයන්න.
(ii) $z = 3 + 4i$ නම්, $\frac{1}{z^2}$, $a + ib$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.
22. පහත සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල වර්ගමූලය සොයන්න.
(i) $2i$ (ii) $-2i$
23. $\frac{1 + 2i}{3 - i} + \frac{1 - 2i}{3 + i}$ තාත්වික වන බව පෙන්වන්න.
24. $u = -10 + 9i$ නම්,
(i) $uv = -11 + 28i$ වන සේ වූ v සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.
(ii) $|u + v| = 8\sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.
25. w හා z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙක කෙසේ ද යත් $w + z$ ද wz යන දෙක ම තාත්වික වේ. w හා z සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධ බව පෙන්වන්න.
26. $z_1 = 3 - i$ ද $z_2 = 7 + 9i$ ද ලෙස දී ඇති විට $wz_1 + wz_2 = 30$ වන සේ වූ w සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයා $|wz_1|$ හි අගය සොයන්න.

27. $\frac{z+3i}{\bar{z}+3i} = 2i$ වන සේ වූ z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

28. z හා w සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් නම් මේවා සාධනය කරන්න.

(i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ (ii) $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$ (iii) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(iv) $\left[\frac{w}{z}\right] = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}, w \neq 0$ (v) $\left|\frac{w}{z}\right| = \left|\frac{\bar{w}}{\bar{z}}\right|, w \neq 0$

29. n ධන නිඛිලයක් නම්, $\bar{z}^n = (\bar{z})^n$ බව ගණිත අනුප්‍රාප්තියෙන් සාධනය කරන්න.

30. වර්ගමූලය සොයන්න.

(i) i (ii) $5 + 2i$

31. පහත දැක්වෙන සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $x^2 + x + 1 = 0$ (ii) $2x^2 + 7x + 1 = 0$ (iii) $x^2 + 9 = 0$
 (iv) $x^2 + x + 3 = 0$ (v) $x^4 - 1 = 0$

32. (i) $x^2 + 4x + 5$ (ii) $x^2 - 2x + 17$
 (iii) $x^2 + x + 1$ (iv) $x^3 - 8$ යන මේවායේ සංකීර්ණ සාධක සොයන්න.

33. (i) $i, -i$ (ii) $2 + i, 2 - i$
 (iii) $1 - 3i, 1 + 3i$ (iv) $1 + i, 1 - i, 2$ මූල ඇති සමීකරණ තනන්න.

34. $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ විකේ මූලයක්

(i) $2 + i$ (ii) $3 - 4i$ (iii) $5i - 12$ (iv) $-1 - i$

නම් a, m, b සහ c ගණනය නොකොට $\frac{-b}{a}$ සහ $\frac{c}{a}$ අගයන්න.

දෙන ලද මූලය 2 නම් මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයිය නොහැකි මන්දැයි පහදන්න.

35. $2x^3 - 9x^2 + 30x - 13 = 0$ සමීකරණයේ විකේ මූලයක් $2 + 3i$ වේ. ඉතිරි මූල දෙක සොයන්න.

36. $x^4 + 3x^3 + 12x - 16 = 0$ සමීකරණයේ විකේ මූලයක් $2i$ බව පෙන්වා එහි ඉතිරි මූල තුන සොයන්න.

37. සංකීර්ණ ඒකජ හර සහිත භින්න භාග ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

(i) $\frac{1}{x^2 + 1}$ (ii) $\frac{4}{x^2 - 4x + 5}$ (iii) $\frac{16}{x^2 + 4x + 8}$
 (iv) $\frac{2}{x^2 + 4}$ (v) $\frac{x + 8}{x^2 + 4x + 13}$

Scanned with CamScanner



38. පහත සංකීර්ණ සංඛ්‍යා මාපාංක හා විස්තාර සොයන්න.

(i) $z = 1 + \sqrt{3}i$

(ii) $z = -1 + \sqrt{3}i$

(iii) $z = -1 - \sqrt{3}i$

(iv) $z = 1 - \sqrt{3}i$

(v) $z = -1 + i$

(vi) $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

39. පහත සංකීර්ණ සංඛ්‍යා මාපාංක හා විස්තාර සොයන්න.

(i) $z = \frac{1-i}{1+i}$

(ii) $z = \frac{(1+i)^2}{1-i}$

(iii) $z = \frac{i-1}{(1+i)^2}$

(iv) $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$

(v) $\frac{(1+i)^4}{(-1+i)^2}$

40. පහත එක් එක් සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(i) $z = 1 - i$

(ii) $z = \sqrt{3} + i$

(iii) $z = -1 + i$

(iv) $z = \sqrt{\frac{1-i}{1+i}}$

(v) $z = \frac{5-i}{z-3i}$

41. (i) $z = \cos \alpha - i \sin \alpha$ නම් $|z|$ හා $\text{Arg } z$ සොයන්න. (මාපාංක z) (විස්තාරය z)

(ii) $z = \sin \alpha + i \cos \alpha$ නම් $|z|$ හා $\text{Arg } z$ සොයන්න.

(iii) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ නම් $1 + z$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $2 \cos \frac{\theta}{2} [\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}]$ බව සාධනය කරන්න.

(iv) $\frac{1 + \sin \theta + i \cos \theta}{1 + \sin \theta - i \cos \theta} = \sin \theta + i \cos \alpha$ බව පෙන්වන්න.

42. $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(i) $1 + i$

(ii) $\sqrt{3} - i$

(iii) $-3 - 4i$

(iv) $-5 + 12i$

(v) $2 - i$

(vi) 6

(vii) -3

(viii) $4i$

(ix) $-3 - i\sqrt{3}$

(x) $24 - 7i$

43. (i) 1 හි ඝන මූල සොයන්න.

(ii) -1 හි ඝන මූල සොයන්න.

(iii) $x^2 + x + 1 = 0$ හි ඝන මූල සොයන්න.

44. $f(x) = x^2 - (2r \cos \theta)x + r$ නම් ද, $f(x) = 0$ හි මූල α හා β නම් ද, α හා β සොයන්න.

45. $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ නම්, w^2 , w^3 සහ w^5 සොයන්න.

46. පහත සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $x + iy$ ආකාරයෙන් ලියන්න.

(i) $2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ (ii) $5\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ (iii) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

(3) ආකාරය



47. පහත දැක්වෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආර්ග්‍ය සටහන් මත රේඛා වලින් නිරූපණය කරන්න. එක් එක් සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය සහ විස්තාරය නිරූපණය කරන්න.

- (i) $3 - 2i$ (ii) $-4 + i$ (iii) $-3 - 4i$ (iv) $5 + 12i$
 (v) $1 - i$ (vi) $-1 + i$ (vii) 4 (viii) $-2i$
 (ix) $a + bi$ (x) $1 + i$ (xi) $i(1 + i)$ (xii) $i^2(1 + i)$
 (xiii) $i^3(1 + i)$ (xiv) $(3 + i)(4 + i)$ (xv) $2\left[\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right]$
 (xvi) $\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$ (xvii) $3\left[\cos \left[-\frac{5\pi}{6}\right] + i \sin \left[-\frac{5\pi}{6}\right]\right]$

48. (i) $z_1 + z_2$ සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් දෙන්න.
 (ii) $z_1 - z_2$ සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් දෙන්න.
 (iii) $z_1 z_2$ සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් දෙන්න.
 (iv) z_1 / z_2 සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් දෙන්න.

49. ආගන් සටහනේ p_1 හා p_2 ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. $z_1 + z_2$ සහ $z_1 - z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ලබාගැනීමට ජ්‍යාමිතික නිර්මාණ දෙන්න.

$|z_1 + z_1| = |z_1 - z_2|$ නම් $\angle P_1OP_2 = \pi/2$ බව පෙන්වන්න.

50. $z = r[\cos \theta + i \sin \theta]$ නම්, z^2 , z^3 සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණ කරන්න.

51. $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1 + 4i$, $z_3 = -4 - i$, $z_4 = -2 - 5i$ නම්, පහත දැක්වෙන එක එකක් ආර්ග්‍ය සටහන් මත රේඛාවලින් නිරූපණය කරන්න. එක් එක් රේඛාවේ දිශාව ඊ හිසකින් පෙන්වන්න.

- (i) $z_1 + z_2$ (ii) $z_2 - z_3$ (iii) $z_1 - z_3$ (iv) $z_2 + z_4$
 (v) $z_4 - z_1$ (vi) $z_3 - z_4$ (vii) z_1 (viii) z_4
 (ix) $z_2 - z_1$ (x) $z_1 + z_3$

52. $z_1 = 3 + 5i$ ද $z_2 = 5 + 3i$ ද නම් $z_1, z_2, z_1 + z_2, z_1 - z_2$ යන මේවා එක එකක් ආර්ග්ගන් සටහනක දක්වා $\text{Arg}(z_1 + z_2)$ හා $\text{Arg}(z_1 - z_2)$ සොයන්න.

53. $z_1 = \frac{2+2i}{1-i}$ හා $z_2 = \frac{2\sqrt{2}}{1-i}$ යන එක් එක් සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය (π ඇසුරින්) විස්තාරය ද සොයා පිළිවෙලින් $z_1, z_2, z_1 + z_2$ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන A, B, C ලක්ෂ්‍යය ආර්ග්ගන් සටහනක ලකුණු කරන්න. O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය නම් OACB රෝම්බසයක් බව සාධනය කර $\tan \frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

54. $z = 2 - i$ ලෙස දී ඇත්නම් $2z, z^2, z^3$ යන මේවායේ මාපාංකය ද මූලික විස්තාරය ද සොයා එක එකක් ආර්ග්ගන් සටහනක ලකුණු කරන්න.

55. ආර්ග්ගන් සටහනක් මත OP ගෙන් නිරූපණය කෙරෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් $x + yi$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. P හි ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක මෙසේය.

- (i) $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ (ii) $\left(3, -\frac{\pi}{4}\right)$ (iii) $\left(1, \frac{2\pi}{3}\right)$ (iv) $\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right)$
 (v) $(3, 0)$ (vi) $(2, \pi)$ (vii) $\left(4, -\frac{\pi}{6}\right)$ (viii) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$
 (ix) $\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$ (x) $\left(1, -\frac{2\pi}{3}\right)$

56. $z_1 = 12 + 5i$ ද $|z_2| = 7$ ද වේ. $|z_1|$ ද $|z_1 + z_2|$ හි අඩුතම හා වැඩිතම අගය ද සොයන්න.

57. $a = 1 + 2i, b = 3 + i$ වන $a, b, a + b$ සංඛ්‍යා ආර්ග්ගන් සටහනක A, B, C ලක්ෂ්‍යවලින් පිළිවෙලින් නිරූපණය වේ. ABC සාප්‍රකෝණික සමද්‍රව්‍යයක් ක්‍රිකෝණයක් බව පෙන්වා ABCD සමචතුරස්‍රයේ D ශීර්ෂයෙන් නිරූපණය වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

58. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ බව ද,
 $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ බව ද පෙන්වන්න.
 $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$
 විට ලැබෙන අවස්ථාව පෙන්වීමට පැහැදිලි දල රූප සටහනක් අඳින්න.

59. $z = 24 + 7i$ සහ $|z_2| = 6$ $|z_1 + z_2|$ හි වැඩිතම සහ අඩුතම අගය සොයන්න.

60. $z_1 = 3 + 4i$ ද $|z_2| = 2$ ද ලෙස දී ඇත්නම් මේවා සොයන්න.

- (i) $|z_1|$ හා $\arg(z_1)$ (ii) $|z_1 + z_2|$ හි වැඩිතම සහ අඩුතම අගය

61. ආර්ගන් සටහන මත $3 + 4i$, $7 + 2i$ හා $5 + 8i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය සමචතුරස්‍රයක ශීර්ෂ වන බව පෙන්වා එහි හතරවන ශීර්ෂය නිරූපණය කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

62. (i) $z_1 = 2 + 3i$ ද $z_2 = 4 + i$ නම්, එම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන් සටහනේ දක්වන p_1 , p_2 ලක්ෂ්‍යයන් යා කරන රේඛාව $3 : 2$ අනුපාතයට බෙදෙන R ලක්ෂ්‍ය දක්වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.
- (ii) $z_1 = 3 + 2i$ ද $z_2 = 2 + i$ ද නම්, මෙම ලක්ෂ්‍යය 2 යා කරන රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය දක්වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

63. පහත අසමානතා තෘප්ත කෙරෙන ප්‍රදේශ අඳුරු කරන්න.

- (i) $|z| < 2$ (ii) $|z| \leq 3$ (iii) $3 < |z| < 5$
 (iv) $|z - 2| < 3$ (v) $|z - 3i| < 5$ (vi) $1 \leq |z + 4 + 3i| \leq 2$

64. පහත අසමානතා තෘප්ත කෙරෙන ප්‍රදේශ අඳුරු කරන්න.

- (i) විස්ථා $z \leq \frac{\pi}{4}$ (ii) විස්ථා $z < \frac{5\pi}{6}$
 (iii) $\frac{\pi}{6} < \text{විස්ථා } z < \frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{\pi}{6} < \text{විස්ථා } (z - 2 - i) < \frac{\pi}{2}$
 (v) $\tan^{-1} \frac{1}{3}$ විස්ථා $z < \tan^{-1}$

65. පහත ප්‍රදේශ අඳුරු කරන්න.

- (i) $\text{Im}(z + 2i) \leq 3$ (ii) $\text{Re}(z - 4) \geq 1$
 (iii) $4 < |z| < 10$ හා $\frac{\pi}{3} < \text{Arg } z \leq \frac{2\pi}{3}$

66. පහත අසමානතා තෘප්ත කරන ප්‍රදේශයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

- (i) $2 \leq |z| \leq 9$ හා $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg } z \leq \frac{\pi}{3}$
 (ii) $3 \leq z \leq 18$ හා $\tan^{-1} \frac{1}{5} \leq \text{Arg } z \leq \tan^{-1} 5$

67. z වලින් ආගන් සටහනේ P ලක්ෂ්‍යය දක්වයි. $|z| \leq 4$ හා $-\frac{\pi}{6} \leq z < \frac{\pi}{3}$ යන සම්බන්ධතා වලින් නිරූපණය වන ක්ෂේත්‍රය ආගන් සටහනේ සෙවන කර දක්වන්න.

- (i) $|z + 1|_{\text{පහළ}} = 5$ බව ද, $|z + 1|_{\text{ඉහළ}} = 1$ බව ද ලබාගන්න.
 (ii) සෙවන කළ ප්‍රදේශයේ ක්ෂේත්‍රඵලය වර්ග ඒකක π බව අපෝහනය කරන්න.

68. (i) $z \neq -1$ විට $\frac{z-1}{z+1}$ සමීකරණයෙන් අනාත්වික නම්, $|z|=1$ බව පෙන්වන්න.

(ii) z හි අගය $\left|z + \frac{2}{z}\right| = 2$ සමීකරණය තෘප්ත කරයි නම්, $|z|$ හි උපරිම අවම අගය පිළිවෙලින් $1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

69. z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙන් ආගන් සටහනේ P ලක්ෂ්‍යය දැක්වේ. $2 \leq |z| < 5$ සහ විස්ථා $z \leq \frac{-2\pi}{3}$ විස්ථා $z \geq \frac{2\pi}{3}$ වලින් දැක්වෙන ප්‍රදේශය සෙවන කර දක්වන්න.

- (i) $|z - 1|$ උපරිම හා අවම අගය සොයන්න.
- (ii) සෙවන කළ ක්ෂේත්‍රඵලය වර්ග ඒකක π බව පෙන්වන්න.
- (iii) විස්ථා $|z - 1|_{\text{cos}} = \pi$ බව ද අපෝහනය කරන්න.



මිශ්‍ර අභ්‍යාස

70. z හා w සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වන අතර z හා w පිළිවෙලින් ඒවායේ ප්‍රතිබද්ධ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වේ. පහත ඒවා සාධනය කරන්න.

- (i) $z\bar{w} + \bar{z}w = 2$ තාත්වික කොටස ($z\bar{w}$)
- (ii) $\overline{(z+w)}(z+w) = z\bar{z} + w\bar{w} + 2$ තාත්වික කොටස (zw)
- (iii) $2 | \text{තා. කො. } z || \text{අතා. කො. } z || z|^2$
- (iv) $|z+w| \leq |z| + |w|$ බව සාධනය කරන්න.

මෙහි තා.කො. z සහ අතා.කො. z පිළිවෙලින් z හි තාත්වික හා අතාත්වික කොටස් දක්වන්න. (ජ්‍යාමිතික සාධක පිළිගනු නොලැබේ.)

71. (i) $2z^2 + z + 2 = 0$ සමීකරණයේ මූල α, β වේ.

$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha\beta + 2i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් බව පෙන්වා, එහි මාපාංකය ද සොයන්න.

(ii) $x^2 - 4x + 5 = 0$ හි එක් මූලයක් $2 - i$ නම්, අනෙක් මූලය ලියන්න. මූල α, β නම්, $\alpha^2\beta, \alpha\beta^2$ මූලවන සමීකරණය සොයන්න.

72. (i) ආගන් සටහනේ A, B නම් ලක්ෂ්‍ය ක්‍රමයෙන් z_1, z_2 නම් සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සඳහන් කරයි. AB හි P නම් ලක්ෂ්‍යය $AP : PB = m : n$ වන ලෙස පිහිටා ඇත. P සඳහන් වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $\frac{nz_1 + mz_2}{n+m}$ බව පෙන්වන්න. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය සඳහන් වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා කුමක්ද?

(ii) ආර්ගන් සටහනේ චතුරස්‍රයක ශීර්ෂ වන A, B, C, D අනුපිලිවෙලින් a, b, c, d නම් සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සඳහන් කරයි. ABCD සමාන්තරාස්‍රයක් නම් පමණක් $a - b = d - c$ යැයි සාධනය කරන්න. සමාන්තරාස්‍රයක ඉහත දැක්වූ ගුණය යොදා එක් සමාන්තරාස්‍රයක විකර්ණ එකිනෙක සමානව ජේදනය කරන බව සාධනය කරන්න.

73. $z_1 = -1 + i, z_2 = \sqrt{3} + i, z_3 = 1 - \sqrt{3}i$ යන එක් එක් සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r [\cos \theta + i \sin \theta]$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $0 \leq \theta < 2\pi$ වේ. තවද, n යනු ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් නම්, $[\cos \theta + i \sin \theta]^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ බව උපකල්පනය කිරීමෙන් $z_1^6 = 8i, z_2^7 = -64(\sqrt{3} + i)$ බව සාධනය කරන්න. [1969 A/L]

74. $f(x) \equiv x^2 - 2r \cos \theta x + r^2 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල λ, μ නම්, $\lambda = (r \cos \theta + i \sin \theta), \mu = r [\cos(-\theta) + i \sin(\theta)]$ බව සාධනය කරන්න. විලෝම වශයෙන්, λ, μ මූල ලෙස ඇති සමීකරණය $f(x) = 0$ බව සාධනය කරන්න. λ^2, μ^2 මූල වශයෙන් ඇති සමීකරණය $x^2 - 2r \cos \theta x + r^2 = 0$ බව අපෝහනය කරන්න. $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}$ මූල ලෙස ඇති සමීකරණය ලබාගන්න. [1973 A/L]

75. (i) ආගන් සටහනේ P ද, Q ද මගින් z_1, z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි. $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$ නම් OQ ට ලම්බ බව පෙන්වන්න.

(ii) $|z_1 + z_2| + |z - 1| = 4$ ද, විස්තාර $(iz) = \pi$ ද වන පරිදි වූ z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න. [1978 A/L]

76. a හා b යනු තාත්වික සංඛ්‍යා ද $b \neq 0$ ද වූ $z = a + ib$ නම් z යනු $z + z$ හා zz යන දෙකම තාත්වික වන පරිදි වූ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් නම් $z = a - ib$ බව පෙන්වන්න. $z_1 = \frac{5+i}{2+3i}$ හා $z_2 = 1+i$ නම් $z_1 + z_2$ හා $z_1 z_2$ තාත්වික බව පෙන්වන්න. z_1, z_2 සංඛ්‍යාවන් $r (\cos \theta + i \sin \theta)$ ආකාරයෙන් දක්වන්න. ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) ද වේ. [1970 A/L]

77. p, q තාත්වික ද $q \neq 0$ ද වන, $p + iq$ තාත්වික වර්ගජ සමීකරණයක් වන $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූලයක් නම්, $p - iq$ සමීකරණයේ මූලයක් බව සාධනය කරන්න. α යනු $x^2 + 2x + x = 0$ සමීකරණයේ $-1 + i$ මූලයයි. එහි අනෙක් මූලය β වේ. α හා β හි මාපාංකය හා විස්තාර සොයන්න. ආගන් සටහනක $\alpha, \beta - i\alpha, i\beta$ යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කර ඒවා සමචතුරස්‍රයක ශීර්ෂ බව පෙන්වන්න. [1968 A/L]

78. z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවකි. ආගන් සටහනේ P වලින් z දැක්වේ. $|2z - 1| = |4z - 3|$ වන සේ, චලිත වන P(z) හි පථය කාටිසීය ආකාරයෙන් සොයා, එය වෘත්තයක් බව පෙන්වන්න. වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය සොයන්න. විස්තාර (z) පවතින සීමාව $-\sin^{-1} \frac{5}{9} \leq$ විස්තාර $z \leq \sin^{-1} \frac{5}{9}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

79. P ලක්ෂ්‍යයේ z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආගන් සටහනේ දැක්වේ. A හා B ලක්ෂ්‍යවලින් 4 හා 4 ලක්ෂ්‍යය දැක්වේ. $z - 4$ හා $z + 4$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන් සටහනේ ලකුණු කරන්න.
- $$\frac{z-4}{z+4} = 3$$
- වලින් දැක්වෙන $P(z)$ හි පථය වෘත්තයක් බව පෙන්වන්න. එහි කේන්ද්‍රය හා අරය සොයන්න. B තුළින් සිරස් රේඛාව මත P ලක්ෂ්‍යය ඇති විට, $|z|$ හා විස්ථා z සොයන්න.
80. (a) $z_1 = 0$ හා $z_2 \neq 0$ බව දී ඇති විට, ජ්‍යාමිතිකව,
- (i) $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ නම් විස්ථා z_1 - විස්ථා z_2 $= \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.
- (ii) විස්ථා $(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{2}$ නම්, $|z_1| + |z_2|$ බව පෙන්වන්න.
- (b) P හා Q ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් z හා w සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. P හි පථය $|z - 2| = 2$ වන වෘත්තය දැක්වෙන බව පෙන්වන්න.
- (c) P_1 වෘත්තයේ චලිත වන විට, Q හි පථය ලබාගන්න. ආගන් සටහන් දෙකක z තලයේ හා w තලයේ ඒවා නිර්මාණය කරන්න.
81. z_1, z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් ආර්ගන් සටහනක් මත නිරූපණය කෙරෙයි. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ බව පෙන්වන්න. $|z_1| = 6$ සහ $|z_2| = 4 + 3i$ නම් $|z_1 + z_2|$ හි වැඩිතම අගය 11 බව පෙන්වන්න. එහි අඩුතම අගය සොයන්න.
82. $z_1 = \frac{2-i}{2+i}$ ද, $z_2 = \frac{2i-1}{1-i}$ නම් z_1 ද z_2 ද $a + ib$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.
- පිළිවෙලින් $5z_1 + 5z_2$ සහ $5z_1 - 5z_2$ සංකීර්ණ, සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන P සහ Q ලක්ෂ්‍යය දැක්වෙන ආර්ගන් සටහනක දළ රූප සටහනක් ඇඳීම.
83. (i) $z = 4 - 3i$ නම්, $a + ib$ ආකාරයෙන් $z + \frac{1}{z}$ ප්‍රකාශ කරන්න.
- (ii) $4i$ හි වර්ග මූල දෙක $a + ib$ ආකාරයෙන් සොයන්න.
- (iii) $z_1 = 5 - 5i$ ද, $z_2 = -1 + 7i$ ද නම්, $|z_1 + z_2| < |z_1 - z_2| < |z_1| + |z_2|$ බව සාධනය කරන්න.
84. $a, b, r, \cos \theta, \sin \theta$ යන මේවායේ අගය දෙමින් $\frac{5 + 12i}{3 + 4i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $a + ib$ ආකාරයෙන් ද ආකාරයෙන් ද $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ආකාරයෙන් ද ප්‍රකාශ කරන්න.
85. a ද b ද තත්වික වන $z_1 = \frac{a}{1+i}$ $z_2 = \frac{b}{1+2i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $z_1 + z_2 = 1$ වන පරිදි වේ. a සහ b සොයන්න.

a හිත් b හිත් මෙම අගය සමග ආර්ගන් සටහනක් මත z_1 සහ z_2 නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය අතර දුර සොයන්න.

86. $z_1 = 3 + i$ හි මාපාංකය සහ විස්තාරය සොයන්න. $z_2 = \sqrt{3} - i$ නම් a සහ b තාත්වික වන $a + bi$ ආකාරයෙන් $q = \frac{z_1}{z_2}$ ප්‍රකාශ කරන්න. z_1, z_2 සහ q ආර්ගන් සටහනක පිහිටුවන්න.

87. $z^2 + z + 1$ යනු එකෙහි ඝන මූල තුනෙන් එකක් යැයි දී ඇති විට ප්‍රකාශනයට තිබිය හැකි අගය දෙක සොයන්න. ω යනු එකෙහි සංකීර්ණ ඝන මූලයක් යැයි දී ඇති විට $(1 + 3\omega + \omega^2)^2, (1 + \omega + 3\omega^2)^2$ යන ප්‍රකාශන එක එකක් සුළු කරන්න. ඒවායෙහි ගුණිතය 16 ට සමාන බවත් ඒවායෙහි වෙනස -4 බවත් පෙන්වන්න.

88. (a) $z_1 = 1 - i$ සහ $z_2 = 7 - i$ නම් මේවායෙහි මාපාංකය සොයන්න.

(i) $z_1 - z_2$ (ii) $z_1 z_2$ (iii) $\frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}$

(b) $|z - 1| = |z - 3i|$ වන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන P ලක්ෂ්‍යයෙහි පර්යේෂණ දළ රූප සටහනක් ආර්ගන් සටහනක් මත අඳින්න. $|z|$ ට මේ පර්යේෂණ මත එහි අඩුතම අගය ඇති විට z සොයන්න.

(c) $|z - 3 + 6i| = 2|z|$ සමීකරණයේ සලකුණු කැරෙන වක්‍රයේ දළ රූප සටහනක් ආර්ගන් සටහනක් මත අඳින්න. කාටීසිය ආකාරයෙන් මෙම වක්‍රයෙහි සමීකරණය කාටීසිය ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

89. A සහ B ලක්ෂ්‍යය $0 < \arg z_2 < \arg z_1$ වන සේ පිහිටි z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආර්ගන් සටහනක් මත පිළිවෙලින් නිරූපණය කරයි. $z_1 + z_2$ සහ $z_1 - z_2$ පිළිවෙලින් නිරූපණය කරන C සහ D ලක්ෂ්‍යය සෙවීමට ජ්‍යාමිතික නිර්මාණ දෙකක්. $\arg(z_1 - z_2) - \arg(z_1 + z_2) = \frac{\pi}{2}$ යැයි දී ඇති විට $|z_1| = |z_2|$ බව සාධනය කරන්න.

90. θ තාත්වික වන $z = \cos \theta + i \sin \theta$ නම් $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} \left(1 - i \tan \frac{\theta}{2} \right)$ බව පෙන්වන්න.

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ හි තාත්වික ශ්‍රිත වන $a + ib$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

91. (a) z සහ එහි ප්‍රතිබද්ධය වන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $zz + 2iz = 12 + 6i$ සමීකරණය සපුරාලන්නේ යැයි දී ඇති විට z ට තිබිය හැකි අගය සොයන්න.

(b) (i) $4 + 3i, 4 - 3i, \frac{4 + 3i}{4 - 3i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා,

(ii) එකෙහි ඝන මූල තුන නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ආර්ගන් සටහනක ලකුණු කරන්න.

Scanned with CamScanner

92. (a) $z = 3 + 4i$ නම් $z + \frac{25}{z}$ සරලතම ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(b) $z = x + yi$ නම් $z + \frac{1}{z}$ හි තාත්ත්වික කොටස සහ අතාත්ත්වික කොටස සොයන්න.
 $z + \frac{1}{z}$ හි අතාත්ත්වික කොටස ශුන්‍ය වනසේ ආර්ග්‍ය සටහනක පිහිටි ලක්ෂ්‍යයවල පර්ව සොයන්න.

93. (a) $(5 + 12i)$ හි වර්ගමූලය සොයන්න.

(b) පහත සඳහන් එක් එක් සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය සහ විස්තාරය සොයන්න.

(i) $(1 - i)$ (ii) $(4 + 3i)$ (iii) $(1 - i)(4 + 3i)$

මෙම සංඛ්‍යා ආර්ග්‍ය සටහනක් මත A, B, C ලක්ෂ්‍යවලින් නිරූපණය කෙරෙයි නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය ගණනය කරන්න.

(c) $|z - i| = 1$ විට $|z + 1|$ හි වැඩිතම අගය එහි අඩුතම අගයට දක්වන අනුපාතය සොයන්න.

94. (a) $\frac{(i+1)^2}{(i-1)^4}$ හි මාපාංකය ද විස්තාරය සඳහා ද එක් අගයක් සොයන්න.

(b) $5 - 12i$ හි වර්ගමූල දෙක a සහ b තාත්ත්වික $a + bi$ වන ආකාරයෙන් සොයන්න. මේ වර්ගමූල නිරූපණය කරන P සහ Q ලක්ෂ්‍යය ආර්ග්‍ය සටහනක් මත දක්වන්න. PQR_1 , PQR_2 ත්‍රිකෝණ සමපාද වනසේ පිහිටි R_1, R_2 ලක්ෂ්‍යය වලින් නිරූපණය කෙරෙන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

95. පහත සඳහන් එක් එක් සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, a සහ b තාත්ත්වික වන $a + bi$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

$|z_2 - z_1| = |z_1 - z_3|$ බව ද විස්තාරයෙන් ප්‍රධාන අගය සඳහා

$\arg(z_2 - z_1) - \arg(z_1 - z_3) = \frac{\pi}{2}$ බව ද පෙන්වන්න.

ආර්ග්‍ය සටහනක P_1, P_2, P_3 ලක්ෂ්‍යවලින් පිළිවෙලින් z_1, z_2, z_3 නිරූපණය කැරෙයි නම් P_2, P_3 විෂ්කම්භය වශයෙන් ඇති වෘත්තය මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න.

96. (a) (i) $(3 + 2i)$ ද (ii) $\frac{1}{(3 + 2i)}$ ද $x + iy$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(b) P යනු ආර්ග්‍ය සටහනක් මත z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ද $|z - 1| = 3|z - i|$ ද නම් P හි පර්වයේ දළ රූප සටහනක් ඇඳන්න. මෙම පර්වයේ සමීකරණය කාටිසිය ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

පර්වයේ පිහිටි $|z| = |z - 1 + i|$ සමීකරණය සපුරාලන ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.

97. (i) $|z - 1 - 1| = 2$ වීම

(ii) $\operatorname{Re} z = 1$ සහ $-\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ වීම

z හි පථය ආර්ගන් සටහනක් මත දක්වන්න. මේ එක් එක් අවස්ථාවේදී $|z_2|$ හි වැඩිතම අගය සොයන්න.

98. (i) $z^2 + 4z + 8 = 0$ සමීකරණයේ එක් එක් මූලයේ මාපාංකය සහ විස්තාරය සොයන්න.

මෙම මූල α සහ β මගින් දැක්වෙයි නම්, $\frac{(\alpha + \beta + 4i)}{(\alpha\beta + 8i)}$ ප්‍රකාශනය සුළු කරන්න.

(ii) $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ද, $z_2 = \sqrt{3} + i$ ද නම් z_1, z_2 ($z_1 = z_2$) යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ආර්ගන් සටහනක දක්වන්න.

99. (i) $(2 - 3i)z = 4 + i$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(ii) $|z| |2i - 1| < |z - 1|$ නම් ආර්ගන් සටහනක z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය පිහිටිය හැකි පෙදෙස අඳුරු කොට දක්වන්න.

100. (i) විද්‍යුත් පරිපථයක ශාඛා දෙකක් සමාන්තරවල ලෙස ඇත්නම් ද ඒවාට ඕම් z_1, z_2 යන සම්බාධක ඇත්නම් ද පරිපථයේ ඕම් z මුළු සම්බන්ධය $\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ න් දැක්වෙයි.

$z_1 = 3 + 4j$ ද $z_2 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}j$ ද නම් $x + iy$ ආකාරයෙන් හා $r < \theta$ ආකාරයෙන්

(එනම් මාපාංක හා විස්තාර ආකාරයෙන්) z ගණනය කරන්න.

(ii) z යනු ආර්ගන් තලයේ $x + iy$ ලක්ෂ්‍යය ද $\left| \frac{z}{z-3} \right| = \frac{1}{2}$ ද නම් z හි පථය සොයන්න.

101. මෙම ප්‍රශ්නයෙහි එක් එක් කොටසෙහි z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක විස්තාරය $-\pi < \arg z < \pi$ අසමානතා සපුරාලිය යුතු වේ.

(a) z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවට r මාපාංකය ද $-\pi < \arg z < \pi$ වන θ විස්තාරය ද ඇත. මේවායේ මාපාංකය සහ විස්තාරය r සහ θ ඇසුරින් ලියන්න.

(i) z^2 (ii) $\frac{1}{z}$ (iii) iz

(b) $|z| = 1$ වනසේ පිහිටි z යනු ඕනෑම සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් නම් ආර්ගන් සටහනක් භාවිතයෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ

$1 \leq |2 + z| \leq 3$ බව ද $-\frac{1}{6}\pi \leq \arg(2 + z) \leq \frac{1}{6}\pi$ බව ද සාධනය කරන්න.



102. (a) $\frac{(-1+i)^3}{(1+i)^4}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය සහ විස්තාරය විච්ඡේදය ලෙස සොයන්න.

(b) P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍යයන් ආගන් සටහනේ පිළිවෙලින් z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. ආගන්ඩ සටහනේ $z_1 + z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම ලබාගැනීමට ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් සපයන්න.

$$z_1 = \frac{1+i}{1-i} \text{ හා } z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i} \text{ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩ සටහනේ ලකුණු කරන්න.}$$

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $z_1 + z_2$ හි පිහිටීම සොයන්න.

$$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \text{ බව අපෝහනය කරන්න.} \quad [2000 \text{ A/L}]$$

103. (a) $\text{Arg}(z-a) = \alpha$ නම්, Z හි පථය විස්තර කරන්න. මෙහි $a \in \mathbb{R}$ සහ $0 < \alpha < \pi$ වේ.

$\text{Arg}(z+1) = \frac{\pi}{6}$ සහ $\text{Arg}(z-1) = \frac{2\pi}{3}$ බව දී ඇත. මුල් කොටස උපයෝගී කරගනිමින් Z සොයන්න.

(b) $\frac{5-i}{2-3i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\lambda(1+i)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

මෙහි a තාත්වික වේ. λ හි අගය ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නැතිව, $\left[\frac{5-i}{2-3i} \right]^6$ අතාත්වික බව පෙන්වා එහි අගය නිර්ණය කරන්න.

[2001 A/L]

104. z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, $z = x + iy$, $x > 0$, $y > 0$ මඟින් දෙනු ලැබේ. ආගන් සටහනේ z , $2iz$, $z + 2iz$ ආනුරූප ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් A , B , C වේ. A , B , C ලක්ෂ්‍යය සලකුණු කර AOB සහ $\tan AOC$ නිර්ණය කරන්න.

(i) C අතාත්වික අක්ෂයේ පිහිටයි නම් x සහ y අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබාගන්න.

(ii) $y = 2x$ නම්, z^2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය OC රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(iii) $|z| \leq 4$ සහ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \text{Arg } z \leq \tan^{-1}(2)$ වන පරිදි වූ Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය

කරන ලක්ෂ්‍යයන්ගෙන් සමන්විත පෙදෙස වෙනත් රූප සටහනක අඳුරු කරන්න.

අඳුරු කළ කොටසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

[2002 A/L]

105. $\omega = \sqrt{3} + i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $r(\cos \theta - i \sin \theta)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $r > 0$ වන අතර $0 \leq \theta < 2\pi$ පරිදි වූ θ , රේඛීය වලින් ඇත. ඉහත ස්වරූපයෙන් ω^2 , ω^3 , ω^4 සහ ω^5 ලබාගන්න. $6 < |z| < 30$ සහ $\frac{\pi}{6} < \text{Arg } z < \frac{5\pi}{6}$ වන සේ වූ z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ඩි සටහනේ නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය වලින් සමන්විත R පෙදෙස අඳුරු කරන්න. ω^n ($n = 1, 2, \dots, 5$) සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය අතරින් කුමන ලක්ෂ්‍යය R පෙදෙසේ පිහිටන්නේ දැයි නිරූපණය කරන්න. [2003 A/L]

106. z යනු $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව යැයි ගනිමු. $2z^2$ හා $\frac{3}{z^2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා එක එකක මාපාංකය හා විස්තාරය සොයන්න. ආගන්ඩි සටහනක O මූල ලක්ෂ්‍යය ද A යන්න $2z^2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද B යන්න $\frac{3}{z^2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද නිරූපණය කරයි. O හා B හරහා යන රේඛාව මත z නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යය පිහිටන්නේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න. $OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන සේ C ලක්ෂ්‍යය තෝරාගෙන ඇත. C මඟින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $p + iq$ කාටීසිය ආකාරයෙන් නිරූපණය කරන්න. $OACB$ හි විකර්ණවල දිග සොයන්න. [2004 A/L]

107. (a) z_1 සහ z_2 යනු ඕනෑම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු. ආගන්ඩි සටහනෙහි $z_1 + z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කෙරෙන ලක්ෂ්‍යය නිර්මාණය කරන්න. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ වන අවස්ථාව විදහා දැක්වෙන රූප සටහනක් අඳින්න. සාධාරණ වශයෙන් $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ වන්නේ ඇයිදැයි ජ්‍යාමිතිකව පැහැදිලි කරන්න. $z_1 = -12 + 5i$ හා $|z_2| = 5$ නම්, $|z_1 + z_2|$ හි වැඩිතම අගය සොයන්න. $|z_1 + z_2|$ ට ස්වකීය වැඩිතම අගය ඇත්නම් හා $\frac{\pi}{2} < \text{Arg } z_2 < \pi$ නම්, $p + iq$ ආකාරයෙන් z_2 ප්‍රකාශ කරන්න.

(b) ආගන්ඩි සටහනේ A, B, C, D ලක්ෂ්‍යය පිළිවෙලින් z_1, z_2, z_3 හා z_4 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. AB හා CD ලම්බව ජේදනය වේ නම්, ච්චිට $\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ හුදෙක් අතාත්වික බව පෙන්වන්න. [2005 A/L]

108. (a) $\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta + i \sin \beta} = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)$ බව පෙන්වන්න. $z_1 = -1 + i$ සහ $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ යැයි ගනිමු. $\frac{z_1}{z_2}$ හි තාත්වික කොටස සහ අතාත්වික කොටස සොයන්න. z_1 සහ z_2 එක එකක් $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $r > 0$ සහ $0 < \theta < \pi$ වේ. $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ බව අපෝහනය කරන්න.

Scanned with CamScanner

(b) R යනු ආගන්ථි සටහනෙහි $0 \leq \text{Im } z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ සහ $|z - 2| \leq 1$ අවශ්‍යතා සපුරාලන z

සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවලින් සමන්විත පෙදෙස ලෙස ගනිමු. R පෙදෙස අදුරු කර, z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය R පෙදෙස පුරා විචලනය වන විට z හි ප්‍රධාන විස්තාරය 'Arg Z' විශාලතම වන පරිදි z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

[2006 A/L]

109. (a) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ හා $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ආගන්ථ සටහනක පිළිවෙලින් A හා B ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කෙරෙයි. Arg z_1 හා Arg z_2 සොයන්න. OACB යනු ආගන්ථ සටහනේ සම්බන්ධයක් යැයි දී ඇත්නම් C මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ මාපාංකය හා විස්තාරය සොයන්න. මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

(b) (i) $\left| z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right| \leq 2$ අවශ්‍යතාව යටතේ $|z - 3|$ හි අඩුතම හා වැඩිතම

අගයන් සොයන්න.

(ii) $\text{Arg}(z - 1) = \frac{\pi}{6}$ අවශ්‍යතාව යටතේ $|z|$ හි අඩුතම අගය සොයන්න.

[2007 A/L]

110. $z^3 - 1$ සාධකවලට බිඳීමෙන් $z^3 - 1 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

ඉහත සමීකරණයෙහි එක් සංකීර්ණ මූලයක් ω නම්, අනෙක ω^2 බව පෙන්වන්න.

$r = 1, 2, 3$ සඳහා $\text{Re} \left(\frac{1}{1 + \omega^r} \right) = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වා ප්‍රතිඵලය ජ්‍යාමිතිකව විවරණය කරන්න.

z_1, z_2 සහ z_3 යනු $z^3 + z^2 + z - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0$ සම්බන්ධය තෘතීය කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුනකි. z_1 යන්න $z_1 = -\omega z_2 - \omega^2 z_3$ හෝ $z_1 = -\omega^2 z_2 - \omega z_3$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. z_1, z_2 හා z_3 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා තුන සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ නිරූපණය කරන බව අපෝහනය කරන්න.

[2008 A/L]

111. (a) $-80 - 18i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි වර්ගමූලය සොයා, $4z^2 + (16i - 4)z + (65 + 10i) = 0$ වර්ගජ සමීකරණය විසඳන්න.

(b) ආගන්ථි සටහනක $\text{Arg}(z + 1) = \frac{\pi}{3}$ සමීකරණය විවරණය කර $|z|$ හි අවම අගය සොයන්න.

(c) ω යනු $z^3 - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි සංකීර්ණ මූලයක් නම්, එවිට ω^2 අනෙක් සංකීර්ණ මූලය බව පෙන්වන්න.

$\omega^k + (1 + \omega)^k = 0$ බව ද පෙන්වන්න. මෙහි k ඔත්තේ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. ඔත්තේ ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාමය k සඳහා $x^2 + x + 1$ යන්න $x^{2k} + (1 + x)^k$ හි සාධකයක් බව අපෝහනය කරන්න.

[2009 A/L]

112. (a) $|z - a| = |z + a|$ සපුරාලනු ලබන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවේ පථය නිරූපණය කරන්න. මෙහි a යනු ඉහත නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවකි.

(b) z_1 හා z_2 ($\neq 0$) යනු $|z_1 - 2z_2| = |z_1 + 2z_2|$ වන ආකාරයේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු.

(c) කොටස උපයෝගී කරගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\frac{iz_1}{z_2} = k$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි k තාත්ත්වික වේ.

(i) $|\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)| = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) ආගන්ධ සටහනෙහි P_1 හා P_2 ලක්ෂ්‍යය දෙක පිළිවෙලින් $z_1 + 2z_2$ හා $z_1 - 2z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි.

OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්භ නොවේ නම්, $P_1 \hat{O}P_2 = \tan^{-1} \left[\frac{4|k|}{k^2 - 4} \right]$ බව

පෙන්වන්න. මෙහි O යනු ආගන්ධ තලයේ මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

OP_1 රේඛාව OP_2 රේඛාවට ලම්භ නම්, k හි විය හැකි අගය දෙක නිරූපණය කරන්න.

[2010 A/L]

113. (i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ හා $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $A(\lambda A + I = I)$ වන අයුරින් λ හා μ අගයන් සොයන්න. මෙහි I යනු 2×2 ඒකක න්‍යාස වේ. එනමින් A^{-1} සොයන්න.

(ii) P, Q හා R යනු ආගන්ධ සටහනේ පිළිවෙලින් z_0, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ප්‍රතික්ෂේප ලක්ෂ්‍යය තුනක් යැයි ගනිමු. $PQ = PR$ ද, θ යනු PQ සිට PR ට වාමාවර්ත ලෙස මනින ලද කෝණය ද නම්, $z_2 - z_0 = (z_1 - z_0)(\cos \theta + i \sin \theta)$ බව පෙන්වන්න.

වාමාවර්ත ලෙස ගන්නා ලද A, B, C හා D ලක්ෂ්‍යය ආගන්ධ සටහනෙහි සමචතුරස්‍රයක් සාදයි. A හා B ලක්ෂ්‍යය මඟින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් $1 - i$ හා z යැයි ගනිමු. C හා D ලක්ෂ්‍යය මඟින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා z අසුරෙන් සොයන්න.

$AC = 2$ වන අයුරින් C විචනය වෙයි නම්, B හි පථය ආගන්ධ සටහනෙහි සොයන්න.

[2011 A/L]

114. z යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු.

$|z|^2 = zz$ හා $|z| \geq \text{Re}z$ බව සාධනය කරන්න. එනමින් ඕනෑම z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක්

සඳහා $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ බව පෙන්වන්න.

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ බව අපෝහනය කරන්න.

$|z_1 - i| < \frac{1}{2}$ නම්, $\frac{1}{2} < |z_1| < \frac{3}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$|z - i| \leq \frac{1}{2}$ හා $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg} z \leq \frac{2\pi}{3}$ සඳහා z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආගන්ධ සටහනෙහි

නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය කුලකය අඩංගු R පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

[2012 A/L]

115. (a) $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමු.

$Q^T Q = \lambda I$ වන පරිදි වූ $\lambda \in \mathbb{R}$ හි අගය සොයන්න. මෙහි Q^T යනු Q න්‍යාසයෙහිම පෙරළීම වන අතර I යනු ඒකක 2×2 න්‍යාසය වේ.

වනයිත් $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ න්‍යාසයෙහි ප්‍රතිලෝමය සොයන්න.

$A = AP = PD$ වන පරිදි වූ 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු. මෙහි $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ වේ.

A සොයන්න.

(b) $z = x + iy$ යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු. මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ. z හි මාපාංකය $|z|$ හා z හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය \bar{z} අර්ථ දැක්වන්න. $|z|^2 = z\bar{z}$ හා $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$ බව පෙන්වන්න. ඒනයිත්, $|z - 3i|^2 = |z|^2 - 6\operatorname{Im} z + 9$ හා $|1 + 3iz|^2 = 9|z|^2 - 6\operatorname{Im} z + 1$ බව පෙන්වන්න.

$|z - 3i| > |1 + 3iz|$ වන්නේ $|z| < 1$ නම් පමණක් අපේක්ෂය කරන්න.

$|z - 3i| > |1 + 3iz|$ හා $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}$ අවශ්‍යතා සපුරාලන පරිදි වූ z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා

නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ආගන්ථි සටහනක අඳින්න.

[2013 A/L]

116. එකම ආගන්ථි සටහනක

(i) $\operatorname{Arg}(z + 1) = \frac{\pi}{3}$

(ii) $\operatorname{Arg}(z - 1) = \frac{3\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයන්හි පර්වල දළ සටහන් ඇඳ, ඒවායේ ජේදන ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

[2014 A/L]

117. (a) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ හා $B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ යැයි ද ගනිමු. $A^T A = B$ වන

පරිදි a හා b හි අගයන් සොයන්න. මෙහි A^T මගින් A න්‍යාසයෙහි පෙරළීම දැක්වේ.

$C = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ හා $X = \begin{bmatrix} u \\ u + 1 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමු. මෙහි $u \in \mathbb{R}$ වේ. $CX = \lambda BX$ යැයි ද

ගනිමු. මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. λ හි අගය හා u හි අගය සොයන්න. λ හි මෙම අගය සඳහාද

$C - \lambda B$ න්‍යාසය සොයා, එහි ප්‍රතිලෝමය නොපවතින බව පෙන්වන්න.

(b) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $|1 - z|^2 = 1 - 2 \operatorname{Re} z + |z|^2$ බව හා

(ii) $z \neq 1$ සඳහා $\operatorname{Re} \left[\frac{1}{1-z} \right] = \frac{1 - \operatorname{Re} z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{1-z} \right] = \frac{1}{2}$ වන්නේ $|z| = 1$ හා $z \neq 1$ ම නම් පමණක් බව අපේක්ෂා කෙරේ. S යනු $\operatorname{Re} \left[\frac{1}{1-z} \right] = \frac{1}{2}$ හා $-\frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}$ යන අවශ්‍යතා දෙකම

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලින් සමන්විත කුලකය යැයි ගනිමු. S හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ආගන්ථි සටහනක අඳින්න. z යන්න S තුළ වේ නම් $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ නම්, $z = \cos \left[\frac{\pi}{12} \right] - i \sin \left[\frac{\pi}{12} \right]$ බව පෙන්වන්න.

අග්‍රත් නිර්දේශයට අනුව විස් (z) = Arg. (z), ද, තා. කො $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, අතා. කො $(z) = \operatorname{Im} (z)$ ලෙස ද භාවිත කරයි. [2014 A/L]

118. ආගන්ථි සටහනක් මත $|z - 3 + 4i| = 2$ සමීකරණ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයේ පථය වන C හි දළ සටහනක් අඳින්න. එනමින්, C මත පිහිටි z සඳහා $|z + 4i|$ හි වැඩිතම හා අඩුතම අගයන් සොයන්න. [2015 A/L]

119. (a) A, B හා C න්‍යාස තුනක්,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \quad \text{හා} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{මගින් දෙනු ලැබේ.}$$

- (i) $AC = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ බව පෙන්වන්න. CA ගුණිතයක් සොයන්න.
- (ii) $BC = I_2$ වන පරිදි a, b, c හා d හි අගයන් සොයන්න.
- (iii) $(\lambda A + \mu B)C = I_2$ වෙයි නම්, λ හා μ සම්බන්ධ කෙරෙන සමීකරණයක් ලබාගන්න.
- (iv) $D = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -6 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය, A හා B ඇසුරින් ප්‍රකාශ කර, එනමින් DC ගුණිතය සොයන්න.

(b) z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ලෙස දෙනු ලැබේ. මෙහි θ ($-\pi < \theta \leq \pi$) තාත්වික පරාමිතියකි. ආගන්ථි සටහනක් මත z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයේ C පථය සොයන්න.

Scanned with CamScanner

$\cos \theta$ හා $\sin \theta$ සඳහා ප්‍රකාශන z හා $\frac{1}{z}$ ඇසුරෙන් ලබාගන්න.

$w = \frac{2z}{z^2 + 1}$ හා $t = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$ යැයි ගනිමු. මෙහි z යන්න $z \neq \pm i$ වන පරිදි C මත පිහිටයි.

(i) $\text{Im}(w) = 0$ හා $\text{Re}(t) = 0$ බව පෙන්වන්න. එනමින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $w^2 + t^2 = 1$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(ii) $w = 2$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(iii) $t = i$ සමීකරණය සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

[2015 A/L]

120. එක ම ආගන්ථි සටහනක,

(i) $|z - i| = 1$

(ii) $\text{Arg}(z - i) = \frac{\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්හි පට්ටල දළ සටහන් ඇඳ, මෙම පට්ටයන්හි ජේදන ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව r

$(\cos \theta + i \sin \theta)$ ආකාරයෙන් සොයන්න. මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ.

[2016 A/L]

121. (a) ආගන්ථි සටහනක, A ලක්ෂ්‍යය $2 + i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරයි. B ලක්ෂ්‍යය, $OB = 2(OA)$ හා $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$ වන පරිදි වේ. මෙහි O යනු මූලය ද $\angle AOB$ මැන ඇත්තේ OA සිට වාමාවර්තව ද වේ. B ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

$OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ C ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද සොයන්න.

(b) $z \in C$ යැයි ද $w = \frac{2}{1+i} + \frac{5z}{2+i}$ යැයි ද ගනිමු. $\text{Im } w = -1$ හා $|w - 1 + i| = 5$ බව

දී ඇත. $z = \pm(2 + i)$ බව පෙන්වන්න.

[2016 A/L]

122. ආගන්ථි සටහනක, $|z| = 1$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයන්හි පට්ටය වූ C හි දළ සටහනක් ඇඳීම.

$z_0 = a(\cos \theta + i \sin \theta)$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ. $\frac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන

සංකීර්ණ සංඛ්‍යා එක එකක මාපාංකය a ඇසුරෙන් ද ප්‍රධාන විස්තාරය θ ඇසුරෙන් ද සොයන්න.

P, Q, R හා S යනු පිළිවෙලින් z_0 , $\frac{\pi}{2}$, $z_0 + \frac{1}{z_0}$ හා z_0^2 යන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ඉහත

ආගන්ධ සටහනෙහි නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යය ඉහත C මත පිහිටන විට

- (i) Q හා S ලක්ෂ්‍යය ද C මත පිහිටන බවත්
- (ii) R ලක්ෂ්‍යය තාත්වික අක්ෂය මත 0 හා 2 අතර පිහිටන බවත් පෙන්වන්න.

[2017 A/L]



අධ්‍යාපනය, දැනුම, බුද්ධිය වගේ ගොඩක්
වටින දේවල් සංකේතවත් කරන්න තමයි
Pen කියන සංකේතය ගොඩාගෙන තිබෙන්නෙ.

Sailing කියන්නේ යාත්‍රා කරනවා,
තරණය කරනවා කියන එක. එතකොට
දැනුම-බුද්ධිය සොයා සයුර-අහස තරණය
කරන්න අපි හදුනා පුංචි නොකාවේ නම තමයි
"Sailing Pen"